NÉDA ZOLTÁN–RAVASZ MÁRIA–
FLORIAN RĂZVAN–LIBÁL ANDRÁS

FÁZISÁTALAKULÁS EGY OPTIMÁLIS KLASZTEREZÉSI FELADATBAN

1. Bevezető

A szociális és gazdasági rendszerek tanulmányozása statisztikusfizikai módszerekkel egy új kutatási terület, amely a számítógép szimulációs módszerek fejlődésével egyre érdekesebb eredmények feltárására nyújt lehetőséget. Jelen dolgozatunk ezen témakörbe mutat be új és meglepő eredményeket. Nap mint nap észlelhetjük a politikában, a gazdaságban, a társadalomban a különböző koalíciók, csoportok közti versengéseket. Természetesen ezen koalíciók kialakulása leginkább az országok vagy pártok közti politikai kapcsolatok, a cégek közti gazdasági viszonyok és a kis társaságok, illetve egyének közti kapcsolatok jellegétől függ. Ezek a társadalmi kapcsolatok egy hierarchikus struktúrájú, nagyon bonyolult topológiával rendelkező hálózatot alkotnak. Leegyszerűsítve ezeket vonzó és taszító kölcsönhatásokra a rendszer koalíciókra szakad, hogy minél jobban megfeleljen az egyének közti kötéseknek. Ideális klasztereződés esetén az egy csoportban levő egyének közt csak vonzó, a különböző csoportokban levők között pedig csak taszító kölcsönhatás létezik. Természetesen ilyen ideális állapot nem mindig lehetséges, de statisztikusfizikai módszerekkel kereshetjük az optimális konfigurációt a rendszerben. A dolgozat keretében ilyen optimális szociológiai koalíciók kialakulását vizsgáltuk egy nagyon egyszerű modellel. Modellünk egy globálisan csatolt rendszert vizsgál, ahol minden két elem közt van kapcsolat, a kötések értékei meg pozitívak vagy negatívak lehetnek (vonzó és taszító kölcsönhatás), és akárhány klaszter kialakulása megengedett. Modellünk nagyon hasonlít a Potts-féle spinüvegmodellhez, de ugyanakkor létezik néhány fontos különbség, amely a rendszer viselkedésében nagyon érdekes változásokat okoz. Az optimális konfiguráció esetén kialakult legnagyobb klaszter relatív méretét vizsgálva a rendszerben létező pozitív kötések valószínűségének függvényében, ter-

modinamikai határesetben egy perkolációra emlékeztető fázisátalakulást észleltünk. Ennek értelmében, ha a rendszerben a pozitív kapcsolatok vannak túlsúlyban, vagyis ha a társadalomban a kolaborálási hajlam a nagyobb, akkor egyetlen nagy klaszter alakul ki, ha viszont a negatív kötések dominálnak, akkor minden egyén külön csoportot fog alkotni.

Az említett fázisátalakulás megjelenését több módszerrel is bizonyítottuk. Először egy egyszerű renormalizációs módszerrel számoltunk, amely a végtelen nagy rendszer határesetében perkolációszerű fázisátalakulásra utalt. Egy jobb megközelítő renormalizációs módszert is használtunk, majd nagyon kis rendszerek esetén egzakt számolásokat végeztünk. Nagyobb rendszerek esetén különböző Monte Carlo típusú optimizációs módszereket alkalmaztunk.

Az általunk vizsgált optimizációs probléma egy frusztrált rendszer optimizálása. A feladat komplexitása hasonlít más érdekes és közismert problémákhoz, mint pl. a tekeredő proteinláncok problémája (*protein folding problem*), a spinüvegek, az „utazó ügynök" feladata (*the travelling salesmen problem*), és a gráfok színezési problémái (*graph coloring problems*).

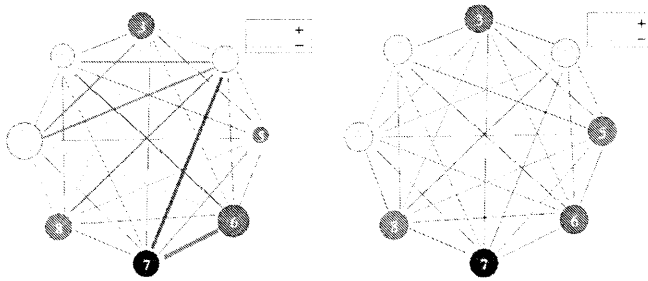
A dolgazatban tárgyalt modell egyszerű, csak néhány alapvető paramétert vesz figyelembe, és amint ezt tárgyalni is fogjuk, több hiányossággal rendelkezik. A modell arra használható, hogy első megközelítésben statisztikailag megjósoljuk a szociológiai rendszerek optimális állapotát, és nem arra, hogy a valóságban kialakult koalíciók létét magyarázzuk. Ugyanakkor hasznos lehet bonyolultabb rendszerek, a valóságot jobban megközelítő modellek tanulmányozásánál és bizonyos szociológiai jelenségek magyarázatánál is.

2. A modell

Modellünkkel szociális rendszerek klasztereződését, koalíciókra való szakadását vizsgáljuk. Ezek a rendszerek lehetnek politikai, gazdasági, társadalmi jellegűek, a csoportok lehetnek országok nemzetközi koalíciói, cégek, melyek hasonló gazdasági standardokkal és stratégiákkal rendelkeznek, pártok, egyesületek vagy egyének, akiket közös érdek köt össze. A társadalmi kapcsolatok egy bonyolult topológiával rendelkező hálózatot alkotnak. A valóságban ezek a kapcsolatok folyton vál-

toznak, mi a modellünkben viszont feltételezzük, hogy a folyamat során (amíg a rendszer eljut az optimális állapotba) a kapcsolatok állandóak.

Az 1. ábrán látható rajz segít átlátni a modell lényegét. A rendszerben összesen N elem létezik, és minden két elem között van kötés, vagyis globálisan csatolt rendszerrel dolgozunk. Két elem között a kötés (Z_{ij}) lehet pozitív, ha pl. az egyének szívesen kolaborálnak, vagy lehet negatív, ha konfliktusban vannak (előjelüket az ábrán a vonalak színe, erősségüket pedig a vonalak vastagsága szemlélteti). Tekintsük most azon egyszerű esetet, mikor a kölcsönhatások szimmetrikusak $(Z_{ij} = Z_{ji})$, később azonban az általános esetet is tárgyaljuk. Tételezzük fel, hogy a modellünkben az elemek bizonyos $S_i > 0$ súlyozási faktorral is rendelkeznek (az ábrán ezt a körök mérete jelképezi), ez megadja, hogy az illető egyénnek milyen társadalmi szerepe van, egy ország mekkora hatalommal rendelkezik, vagy egy cég milyen szerepet játszik a gazdaságban.



a. b.

1. ábra. *A modell grafikus vázlata: a. általános eset, b. egyszerűsített eset* $S_i = 1, Z_{ij} = \pm 1$.

A rendszerben az i-edik elem állapotát, vagyis azt a koalíciót, amelyhez tartozik $\sigma(i)$-vel jelöljük (az ábrán a körök színei szemléltetik ezt), ahol $\sigma(i) \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ és $i = 1, 2, ..., N$. Tehát p a lehetséges állapotok (a koalíciók) maximális száma. Két különböző esetet fogunk vizsgálni (i), mikor $p = N$ illetve (ii) mikor p egy rögzített véges érték. Feladatunk, hogyan fognak csoportokba rendeződni az egyének ahhoz, hogy legjobban kielégüljenek a kapcsolatok. Természetesen minden egyén szeretne egy csoportba kerülni azokkal, akikkel pozitív kapcsolata van, és távol szeretne maradni azoktól, akikhez negatív kötés fűzi. Ideális klasztereződés esetén minden klaszteren belül csak pozitív, a csoportok között pedig csak negatív kötések kellene legyenek. Rögtön átlátható azonban,

hogy ez nem mindig lehetséges. Tehát egy spinüvegekhez hasonló frusztrált rendszerünk van. A rendszerben a statisztikusfizika módszereit használva definiálhatunk egy rendszer energiát (költségfüggvényt), és ezt minimalizálva juthatunk el az optimális állapotba.

Definiáljuk az ideális állapot energiáját nullának. Mint már említettük, ideális állapot alatt értjük, mikor minden egyén egy csoportban van azokkal és csak azokkal, akikhez pozitív kötés fűzi. Az energiát felírhatjuk sorra véve a kötéseket. Az i-edik és j-edik elem közötti kötést vizsgálva, ha a rendszernek a pillanatnyi állapota kielégíti a kapcsolatot:

- a kötés pozitív $Z_{ij} > 0$, és ugyanabban a koalícióban vannak $\sigma(i) = \sigma(j)$;
- a kötés negatív $Z_{ij} < 0$, és különböző koalíciókban vannak $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, akkor az energia értéke nem változik (így lesz az ideális állapot energiája nulla).

Ha a jelenlegi klasztereződés nem elégíti ki a kapcsolatot:

- a kötés pozitív $Z_{ij} > 0$, de különböző koalícióban vannak $\sigma(i) \neq \sigma(j)$
- a kötés negatív $Z_{ij} < 0$, de ugyanabban a csoportban vannak $\sigma(i) = \sigma(j)$, akkor a rendszer energiája $S_i S_j |Z_{ij}|$ értékkel növekszik.

Láthatjuk, hogy a már említett S faktorok most a kapcsolat energiáját, ezáltal erősségét és fontosságát határozzák meg.

Ezekután a rendszer „energiafüggvényét" (költségfüggvényét) matematikailag a következőképpen írhatjuk fel:

$$K = \sum_{i<j} \left[\frac{1}{2} \left(Z_{ij} + |Z_{ij}| \right) S_i S_j \left(1 - \delta_{\sigma(i)\sigma(j)} \right) - \frac{1}{2} \left(Z_{ij} - |Z_{ij}| \right) S_i S_j \delta_{\sigma(i)\sigma(j)} \right],$$

vagy más formában:

$$K = -\sum_{i<j} \delta_{\sigma(i)\sigma(j)} S_i S_j Z_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \left(S_i S_j Z_{ij} + |S_i S_j Z_{ij}| \right). \qquad (1)$$

Adott rendszer esetén (a kötések és a súlyozási faktorok adott eloszlása esetén) az (1) képlet második tényezője állandó, hiszen nem függ a koalíciók konfigurációjától, ezért a K függvény minimalizálásánál lényegében a következő függvénnyel kell dolgoznunk:

$$K' = -\sum_{i<j} \delta_{\sigma(i)\sigma(j)} S_i S_j Z_{ij} \tag{2}$$

3. A klaszterezési feladat egyszerűsített változata

A legegyszerűbb eset, amelynél még észlelhetjük a bevezetőben említett fázisátalakulást az, amikor az elemek súlyozási faktorai $S_i = 1$, és a Z_{ij} kötések értéke pedig q valószínűséggel $+1$, illetve $(1-q)$ valószínűséggel -1 (1b. ábra).

Így a számunkra fontos K' energiafüggvény alakja a következő lesz:

$$K' = -\sum_{i<j} T_{ij} \delta_{\sigma(i)\sigma(j)},$$

ahol $T_{ij} = S_i S_j Z_{ij} = \pm 1$ és $\sigma(i) \in \{0, 1, 2, ..., N-1\}$, vagyis azt az esetet vizsgáljuk, amikor $p = N$ állapot létezik a rendszerben (a koalíciók számát nem korlátozzuk).

A T_{ij} kötések eloszlásfüggvénye:

$$P(T_{ij}) = q\delta(T_{ij} - 1) + (1-q)\,\delta(T_{ij} + 1),$$

ahol a q a pozitív kötések előfordulási valószínűsége (ezek gyakorisága a rendszerben).

Keresve a rendszer optimális állapotát, azt észleljük (lásd a későbbi fejezeteket), hogy a q valószínűségnek létezik egy kritikus értéke, amely felett – termodinamikai határesetben ($N \to \infty$) – egyetlen minden egyént magába foglaló klaszter alakul ki, alatta pedig minden egyén külön koalíciót akar kialakítani. Tehát fázisátalakulás észlelhető, amely nagyon hasonlít a perkolációra. Mivel ennek a fázisátalakulásnak nincs köze a hőmérséklethez *geometriai fázisátalakulásról* beszélünk. Ezt a fázisátalakulást vizsgáltuk véges méretű rendszerek esetén. Az általunk megválasztott rendparaméter a kialakult legnagyobb klaszter relatív mérete:

$$r(q) = \left\langle \overline{\max_{(i)} \left\{ \frac{C_x(i,q)}{N} \right\}} \right\rangle_x,$$

ahol $C_x(i,q)$ az i állapotban levő elemek száma a kötéseknek egy x eloszlása esetén. Mivel a modellünkben az alapállapot (az optimális állapot) nagyon gyakran elfajult állapot, a koalícióknak többfajta konfigurációja rendelkezik ugyanakkora energiával, és ezekben a legnagyobb klaszter mérete különbözhet, ezért a rendparaméter kiszámításánál átlagolunk ezekre az állapotokra nézve (ezt a felülvonás jelképezi), és ugyanakkor átlagolunk a Z_{ij} kötések különböző megvalósulására is ($\langle\rangle_x$).

4. Összehasonlítás a Potts-féle spinüvegmodellel

A Potts-féle spinüvegmodellt eredetileg a szilárdtestfizikában vezették be olyan véletlenszerű struktúrával rendelkező nem mágneses anyagok modellálására, amelyek nem rendelkeznek tükrözési és rotációs szimmetriákkal (Binder–Reger 1992; Kirkpatrick–Wolynes 1987). A gyakran használt szilárdtestfizikai és statisztikusfizikai alkalmazása mellett egyre érdekesebb alkalmazásokat nyer a szociológiai rendszerek vizsgálatánál (Axelrod–Bennett 1993; Galam 1996, 1997; Florian–Galam 2000).

A végtelen skálájú Potts-modell Hamilton-függvényét a következőképpen értelmezik:

$$H_{Potts} = -p\sum_{i<j} J_{ij}\delta_{\sigma(i)\sigma(j)}, \tag{3}$$

ahol p a lehetséges állapotok száma (a mi modellünkben a koalíciók számának felel meg), J_{ij} -vel a kötéseket jelöltük, $\sigma(i)$ pedig az i-edik elem állapotát jelöli, amely felveheti a $0, 1, \ldots, p-1$ értékeket. A kötések értéke véletlenszerűen változik, átlaguk $\langle J_{ij}\rangle = \frac{J_0}{N}$, a variancia pedig $\Delta J = \left\langle J_{ij}^2\right\rangle - \langle J_{ij}\rangle^2 \sim \frac{1}{N}$.

Ezt a modellt ilyen formában már nagyon sokan tanulmányozták (Elderfield–Sherrington 1983; Erzan–Lage 1983; Gross et alli 1985; Kirkpatrick–Thirumalai 1988; Cwillich–Kirkpatrick 1989; Santes at alii 1995; Yokota 1995; Peters et alii 1996; Dillman et alii 1998), és egzakt eredmények szerint (Elderfield–Sherrington 1983; Santes et alii 1995) $p > 2$ esetben elég alacsony hőmérsékleten a Potts-féle spinüveg mindig ferromágneses, tehát az elemek ugyanazon állapotban (koalícióban) találhatók.

Láthatjuk, hogy a koalíciómodell „energiafüggvénye (K')" és a Potts-modell Hamilton-függvénye nagyon hasonlítanak, és a $p = N$ esetben azonos alakban írhatóak: ha $T_{ij} = NJ_{ij}$, és a J_{ij} eloszlásfüggvénye

$$P(J_{ij}) = q\delta\left(J_{ij} - \frac{1}{N}\right) + (1-q)\,\delta\left(J_{ij} + \frac{1}{N}\right),$$

akkor

$$K' = -N\sum_{i<j} J_{ij}\delta_{\sigma(i)\sigma(j)}.$$

Felvetődik tehát a kérdés, hogy az általunk tanulmányozandó modell nem ekvivalens-e a Potts-üveggel, és így az erre kapott analitikus eredmények egyszerűen alkalmazhatók a mi esetünkre. Ennek ellenére azonban, hogy a Hamilton-függvény azonos alakú, a két modell *nem* (!) ekvivalens, és több fontos különbség létezik:

1. ha az előbb felírt eloszlásfüggvény segítségével kiszámítjuk a J_{ij} kötések átlagát és varianciáját, a következő eredményeket kapjuk:

$$\langle J_{ij}\rangle = \frac{2q-1}{N} \text{ és } \Delta J = \langle J_{ij}^2\rangle - \langle J_{ij}\rangle^2 = \frac{4q(1-q)}{N^2},$$

   láthatjuk, hogy a Potts-modellnél felírt adatoktól eltérően a mi modellünkben a kötések varianciája N^{-2}-nel arányos;

2. a két modell közötti második lényeges különbséget az állapotok, konfigurációk elfajulásánál észleljük. A koalíciómodellben csak azt vesszük figyelembe, hogy miként csoportosulnak az elemek, nem számít a koalíciók állapota, ellentétben a Potts-modellel. Ha veszünk egy k koalícióból álló konfigurációt, sorra véve a koalíciókat, az első akármilyen (N db.) Potts-állapotban lehet, a második már csak $(N-1)$ féle állapotban lehet, a k-adik koalíciónál $(N-k+1)$ lehetőség marad. Tehát a koalíciómodell egyetlen konfigurációjának nagyon sok Potts-konfiguráció felel meg. Ezt matematikailag is felírhatjuk. Ha a mi modellünkben egy N elemből álló rendszerben a k koalícióból álló konfigurációk számát $C(N,k)$-val jelöljük, a Potts-üvegben ezen konfigurációk száma a következő lesz:

$$C_{Potts}(N,k) = \frac{N!}{(N-k)!}C(N,k),$$

ezáltal az következik, hogy az általunk számított átlaggal kapott rendparaméter nem egyezik meg a Potts-modellre érvényes hasonló rendparaméter értékével;

3. végül meg kell jegyeznünk, hogy az általunk vizsgált $p = N$ eset statisztikusfizikai szempontból lényegesen eltér azoktól az esetektől, mikor az állapotok száma p egy véges érték. A $p = N$ esetben azonnal látható, hogy a magas hőmérsékletű entrópia $NlnN$ alakú, amely arra utal, hogy a modell nem extenzív (a termodinamika értelmében minden termodinamikai potenciál extenzív kell legyen, vagyis N-nel kell arányos legyen). A K energiafüggvényről is azonnal látható, hogy nem marad extenzív a $p = N$ határesetben, azonban ezt egy gaugetranszformációval extenzív alakra lehetne hozni. A magas hőmérsékletű entrópiát azonban nem lehetséges extenzív alakra hozni. Modellünk tehát szuperextenzív, és nem várható, hogy az extenzív Potts-üvegre a reprika módszerrel kapott eredmények direkt módon alkalmazhatók legyenek.

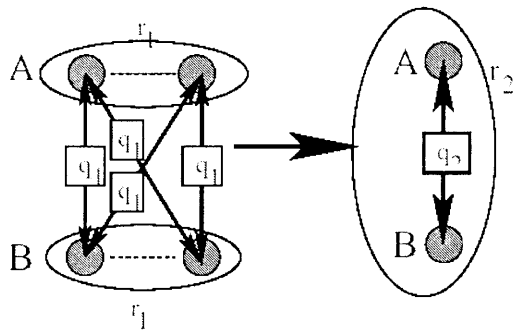
A Potts-modell esetén kapott eredmények szerint $p > 2$ és $T = 0$ esetben a rendszer mindig ferromágneses, vagyis egyetlen koalíció alakul ki. A felsorolt különbségek miatt nem mondhatjuk, hogy a két modell ekvivalens, és amint már az előző fejezetben említettük, a mi eredményeink más viselkedést mutatnak: az optimális állapotban a legnagyobb klaszter relatív méretét mérve a pozitív kötések koncentrációjának függvényében egy fázisátalakulást észleltünk. Ezt a fázisátalakulást több módszerrel vizsgáltuk és igazoltuk. A következőkben ezeket a módszereket és a kapott eredményeket részletezzük.

5. A renormalizációs módszer

Első megközelítésként egyszerű renormalizációs módszert mutatunk be. A módszer lényege, hogy mindig megduplázzuk a rendszer méretét, és a rendparaméter előbbi értékéből rekurzív úton megbecsüljük az új értéket. Eredetileg két elemből álló rendszerből indulunk ki. Ha a két elem között a kötés $q_1 = q$ valószínűséggel pozitív, azt jelenti, hogy az optimális állapotban a legnagyobb klaszter relatív mérete $q_1$valószínűséggel 1, illetve $1 - q_1$ valószínűséggel 1/2. Tehát:

$$r_1 = q_1 + (1 - q_1)/2.$$

Második lépésben veszünk két ilyen, két elemből álló rendszert (A, B) amelyekben a legnagyobb klaszter mérete r_1, és összekötjük az elemeket egymással (2.ábra).



2. ábra. *A renormalizáció grafikus vázlata.*

Most ki kell számítanunk annak a valószínűségét (q_2), hogy az új, A és B közti kötés pozitív legyen. Ahogy az ábrán is látható az A és B elemei között összesen négy kötés létezik, ezért az új kötést pozitívnak vesszük a következő esetekben:

- ha mind a négy kötés pozitív, ennek a valószínűsége q_1^4;
- ha három pozitív és egy negatív, mivel négy ilyen eset van, ennek a valószínűsége $4q_1^3(1-q_1)$;
- amikor két pozitív és két negatív kötés van (összesen hat ilyen kombináció létezik), akkor az esetek felében vesszük pozitívnak az új kötést. A valószínűség így $3q_1^2(1-q_1)^2$.

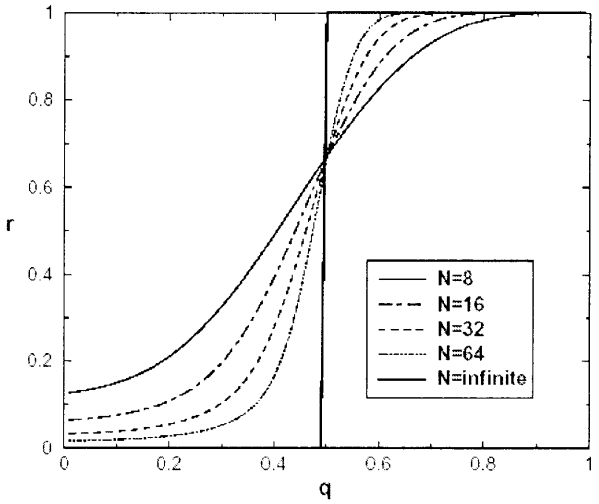
Tehát:

$$q_2 = q_1^4 + 4q_1^3(1-q_1) + 3q_1^2(1-q_1)^2 .$$

a legnagyobb klaszter relatív mérete pedig

$$r_2 = q_2 + (1-q_2)\, r1/2.$$

mivel q_2 valószínűséggel A és B egy klasztert alkot, vagyis a rendparaméter 1, $(1-q_2)$valószínűséggel pedig a legnagyobb klaszter az A vagy a B legnagyobb klasztere lesz, amelynek az eddigi relatív mérete $r_1$volt, de mivel a rendszer méretét megdupláztuk, most ehelyett $r_1/2$-t kell írnunk a képletbe.



3. ábra. *A renormalizációs módszerrel nyert eredmények.*

Ezután végtelen sokszor megismételjük ezt a lépést, megkétszerezve a rendszer méretét. k lépés után a rendszer mérete $N_k = 2^k$, és felírhatjuk a renormalizációs egyenletek általános formáját:

$$q_{k+1} = q_k^4 + 4q_k^3 (1 - q_k) + 3q_k^2 (1 - q_k)^2 , \tag{4}$$

$$r_{k+1} = q_{k+1} + (1 - q_{k+1}) r_k/2. \tag{5}$$

Lássuk most, hogy milyen értékhez tart a rendparaméter végtelen lépés után, annak függvényében, hogy milyen kezdeti q valószínűségi értékből indultunk ki. A (4) egyenletnek két stabil iterációs fixpontja van, 0 és 1, illetve egy instabil fixpontja az $1/2$. Ha $q \in [0, 1/2)$ értékből indulunk ki akkor $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$ és $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, ha pedig egy $q \in (1/2, 1]$ értéktől indulunk el, akkor $\lim_{k\to\infty} q_k = 1$ illetve $\lim_{k\to\infty} r_k = 1$. Az eredmények alapján elmondhatjuk, hogy végtelen rendszer esetében két különböző fázis létezik, a fázisátalakulás pedig a $q_0 = 1/2$ értéknél történik:

- ha a rendszerben egy kötés $q < 1/2$ valószínűséggel pozitív, vagy másképpen megfogalmazva, a rendszerben a kötéseknek kevesebb mint fele pozitív, akkor végtelen nagy rendszer esetén az optimális

állapotban a legnagyobb klaszter várható relatív mérete a nullához tart. Ilyenkor a szociológiai rendszerekben az egyének nem kolaborálnak eléggé, nem képződnek csoportok, az egyének elkülönülnek egymástól;

- ha a rendszerben $q > 1/2$, tehát a kapcsolatok több mint fele pozitív, akkor az optimális állapotban a legnagyobb klaszter relatív mérete 1-hez tart. Ilyenkor kevés a konfliktus, és az egész rendszer egy óriási koalíciót alkot.

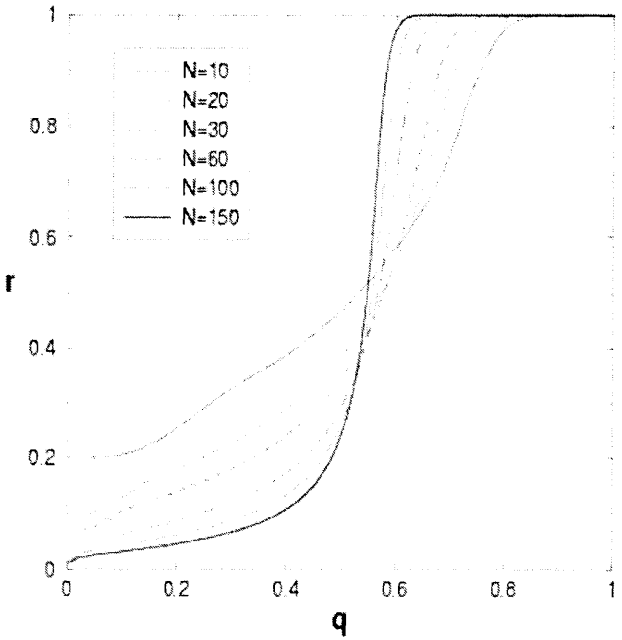
A renormalizációs egyenletek alapján ábrázolhatjuk az r rendparaméter változását a q valószínűség függvényében, a termodinamikai határesetben, illetve különböző véges méretű rendszerek esetén (3. ábra). Az ábrán látható, hogy valóban egy perkolációra emlékeztető fázisátalakulásról van szó.

6. Jobb megközelítő módszer

A rendszerben mindig meg kell keresnünk a koalíciók optimális konfigurációját. Erre az optimizációs problémára kidolgoztunk az előbbi egyszerű renormalizációnál jobb megközelítő módszert is. Kezdetben legyen a rendszerben az összes kötés negatív, és ennek megfelelően mindenki külön állapotban, koalícióban van, mivel ez az optimális konfiguráció. A következő lépéseket ismételjük:

- véletlenszerűen választunk egy negatív kötést és pozitívra változtatjuk;
- a két elemet, amelyeket ez a kötés kapcsol össze, új optimális állapotba helyezzük: vagy az elsőt helyezzük át a második koalíciójába, vagy a másodikat helyezzük az elsővel egy csoportba, vagy mindkettő az eredeti állapotában marad, attól függően, hogy melyik állapot a legkedvezőbb (minimális az energia);
- ha egy elemnek megváltoztattuk az állapotát, akkor sorra megvizsgáljuk az összes hozzá pozitívan csatolt elemet, és ezeket is áthelyezzük abba az állapotba, ha az energia K csökken;
- megjegyezzük a rendparamétert (a legnagyobb klaszter méretét) a pozitív kötések relatív számának (q) függvényében.

Ezt addig ismételjük, amíg az összes kötés pozitív lesz. Ezáltal végigjártuk a q valószínűségi paraméter összes lehetséges értékét, és mindegyikre megjegyeztük a rendparaméter értékét. Mivel a kezdeti állapot-

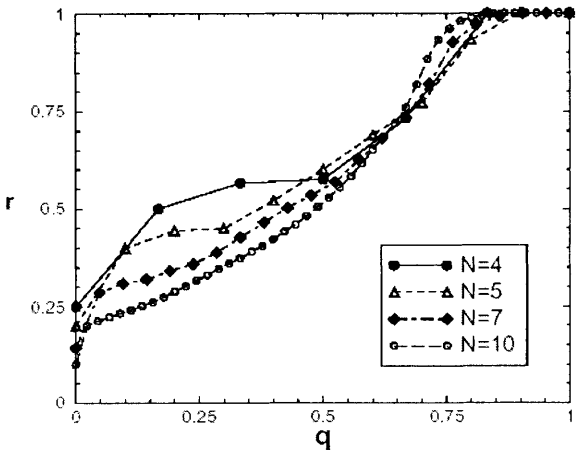


4. ábra. *Az új optimizációs módszer eredményei.*

ban ideális állapotból indulunk ki, és utána mindig megfelelően változtatjuk az elemek állapotát, végig elég közel maradunk az optimális állapothoz, bár most sem kapunk egzakt eredményeket. Az egész folyamatot nagyon sokszor megismételjük, hogy a q minden értékénél a kötéseknek sok konfigurációja előforduljon, és egy jó statisztikai átlagot kapjunk. Ezt a módszert alkalmazva $N = 150$ méretű rendszerekre jó átlaggal (10 000 konfiguráció) tudtunk számolni. Az eredmények (4. ábra) jól egyeznek a renormalizáció során kapott eredményekkel, és a megsejtett fázisátalakulást igazolják.

7. Egzakt eredmények kis rendszerek esetén

Kis rendszerekben a Z_{ij} kötéseknek egy adott eloszlása esetén számítógép segítségével feltárható a $\sigma(i)$ koalíciók összes lehetséges konfigurációja. Mindegyik konfigurációnál kiszámítva a rendszer energiáját, egzakt módon megkaphatjuk a minimális energiát, és a hozzátartozó op-

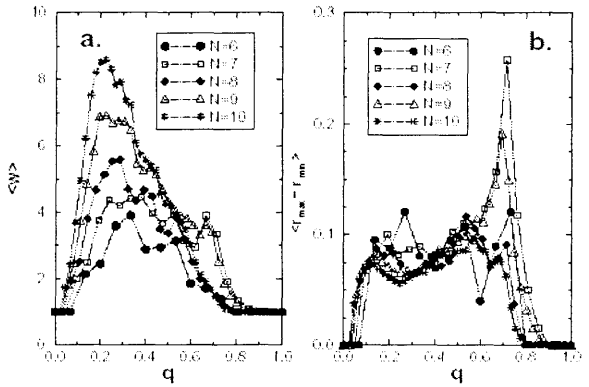


5. ábra. *Egzakt eredmények.*

timális konfigurációt, illetve a rendparamétert. A rendparaméter viszont változhat a kötések különböző eloszlása esetén, ezért egy sokaságátlagot kell alkalmaznunk erre is. $N \leq 7$ méretű rendszerekben a kötések eloszlásának összes konfigurációja is feltérképezhető aránylag „kivárható" számítógépes idő mellett, tehát itt egzakt eredményeink vannak. $7 < N \leq 10$ méretű rendszereknél a számítógép által igényelt memória és futtatási idő nagyon megnő, ezért már nem számoljuk ki a rendparamétert a kötések összes lehetséges eloszlása esetén, de egy elég nagy számú (5000) konfigurációra átlagolunk. Az eredmények az 5. ábrán láthatók.

Annak ellenére, hogy csak nagyon kis méretű rendszerekre tudtunk egzakt eredményeket kapni (ahol a fázisátalakulás még eléggé „elmosódott"), szükségesnek tartottuk elvégezni ezeket a számításokat, hogy ellenőrizhessük a többi módszer által nyújtott eredményeket. Az 5. ábrán látható, hogy az $r(q)$ görbék meredeksége (a q_0 körül) egyre nő a rendszer méretének növelésével. Ugyanezt mutatják az előbbi megközelítésekkel kapott ábrák is. Az eredmények alátámasztják tehát elvárásainkat.

Tanulmányoztuk ugyanakkor az alapállapot elfajulását is. Mint már említettük a kötéseknek egy eloszlása esetén az alapállapotban a koalícióknak több konfigurációja is lehetséges, mivel több egyenlő energiájú állapot létezhet. Ezáltal értelmezünk egy elfajulási paramétert, w, amely



6. ábra. *a. Az elfajulási paraméter és b. az elfajult alapállapotok közötti maximális deviációja a rendparaméternek a pozitív kötések koncentrációjának függvényében.*

megadja, hogy hány állapot energiája egyezik meg a minimális energiával. Ezt természetesen ismét átlagolnunk kell a kötések különböző eloszlására: $< w >$. Ábrázolva ezt a pozitív kötések q valószínűségének függvényében (6a.ábra), azt észleljük, hogy az elfajulás egyre nő a rendszer méretének a növekedésével, és a csúcsértéke egyre kisebb q értékeknél jelentkezik.

Az alapállapotban lehetséges konfigurációkban a rendparaméter értéke is ingadozik, a legnagyobb eltérés átlagértékét: $\langle (r_{\max} - r_{\min}) \rangle$ a 6b. ábrán ábrázoltuk a q függvényében. Ez a paraméter is növekszik a rendszer méretének a növelésével, viszont érdekes megfigyelni, hogy ennek csúcsértékei egyre nagyobb q értékeknél jelennek meg.

8. Monte Carlo optimizációs módszerek

A statisztikusfizikában a frusztrált rendszerek tanulmányozására gyakran Monte Carlo típusú optimizációs módszereket használnak. Feladatunk, hogy a rendszer energiáját minimalizálva keressük a rendszer alapállapotát. Erre két optimizációs módszert is használtunk: a klasszikus szimulációs hűtési módszert [*simulated annealing* (Kirckpatrick et alii 1983)] és egy nemrég kidolgozott optimizációs módszert [*extremal optimization method* (Boettcher–Percus 2000, 2001)].

A szimulációs hűtési módszer lényegét megpróbáljuk itt röviden vázolni. Kezdetben az elemeket véletlenszerűen különböző állapotokba helyezzük, a kötéseket q valószínűséggel pozitívnak vesszük. A rendszert egy T hőmérsékleti értékkel jellemezzük, amelynek értékét az időlépések során nagyon lassan csökkentjük.

Egy időlépésben nagyon sokszor elvégezzük a következő lépéseket:

- véletlenszerűen kiválasztunk egy elemet a rendszerből;
- áthelyezzük a legmegfelelőbb koalícióba úgy, hogy a rendszer összenergiája a lehető legkisebb legyen;
- ha áthelyezéssel nem lehet csökkenteni a rendszer energiáját, megkeressük, hogy melyik koalícióba helyezve az elemet nőne a legkevesebbet a rendszer energiája, és ezt a lépést $\exp(\Delta K/T)$ valószínűséggel végrehajtjuk.

Egy időlépésen belül ezeket a lépéseket nagyon sokszor elvégezzük, hogy lehetőleg minden elem sorra kerüljön. Az időlépés végén csökkentjük a hőmérséklet értékét, majd a következő időlépésben ismét elvégezzük ezeket a lépéseket. Így megkapjuk egy adott q értékre (a pozitív kötések valószínűsége) és a Z_{ij} kötések egy adott eloszlása esetén a rendszer optimális állapotát, de természetesen mindezt el kell végeznünk a q több értékére és a kötések nagyon sok különböző eloszlása esetén.

Látható, hogy bizonyos valószínűséggel a rendszer energiáját növelő lépéseket is megengedünk, és ez a valószínűség a hőmérséklettől függ. A hűtési módszert frusztrált rendszerek esetén alkalmazzák. A mi modellünk is frusztrált, és az energiának nagyon sok lokális minimuma létezik. Ha csak az energiát csökkentő lépéseket engedélyezzük, a rendszer könnyen bekerül egy ilyen lokális minimumba, és nem kerülhet ki onnan. A hűtési módszer lényege az, hogy a hűtés elején, amíg nagy a hőmérséklet, viszonylag nagy energiaváltozások megengedettek a rendszerben, majd nagyon lassan csökkentve a hőmérsékletet, egyre kisebb és kisebb fluktuációkat engedélyezünk, így ha jól kikísérletezzük a szimulációs paramétereket, akkor elérhető, hogy a rendszer a globális minimumba kerüljön. Sajnos soha nem lehetünk teljesen biztosak, hogy az energia elérte a minimumot, de sokkal jobb, frusztrált rendszerekre alkalmazható közelítő módszerek még mindig nem léteznek.

Az újabb optimizációs módszert kissé általánosítva (két lépésben) alkalmaztuk. Miután kezdetben az elemek állapotát véletlenszerűen választjuk meg, a pozitív kötések valószínűsége pedig q, a módszer fő lépései a következők:

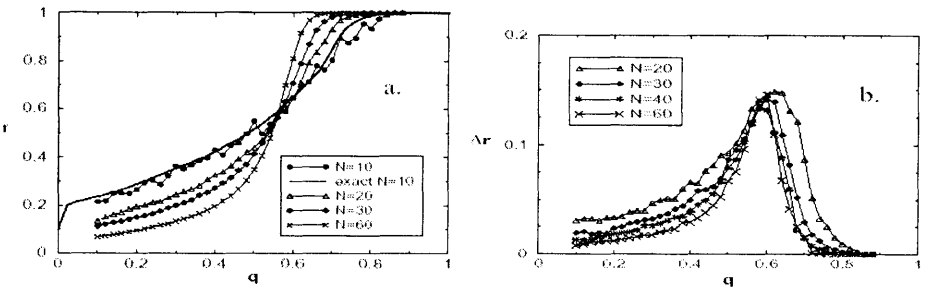
- az elemeket energiájuk szerint csökkenő sorrendbe helyezzük, k sorszámot adva mindegyiknek, és egy $P(k) \sim k^{-\tau}$ valószínűségi állandót rendelünk hozzájuk;
- véletlenszerűen választunk egy elemet (pl. az m-edik), és $P(m)$ valószínűséggel ez lesz az az elem, amelynek az állapota változni fog;
- most növekvő sorrendbe rendezzük a lehetséges új állapotok energiáit, ismét megszámozzuk őket, és egy $P(k) \sim k^{-\tau}$ valószínűségi faktort rendelünk hozzájuk;
- véletlenszerűen választunk egy új állapotot (legyen a sorban az n-edik), és $P(n)$ valószínűséggel ez lesz a rendszer új állapota.

Látható, hogy mindig a legnagyobb energiával rendelkező elem állapotát változtatjuk a legnagyobb valószínűséggel, és mindig a legkisebb energiájú állapotba helyezzük a rendszert a legnagyobb valószínűséggel. Ezeket a lépéseket nagyon sokszor megismételjük, ugyanakkor, akárcsak a szimulált hűtés esetében, az egész folyamatot több különböző q értékre és a kötéseknek nagyon sok konfigurációjára el kell végeznünk.

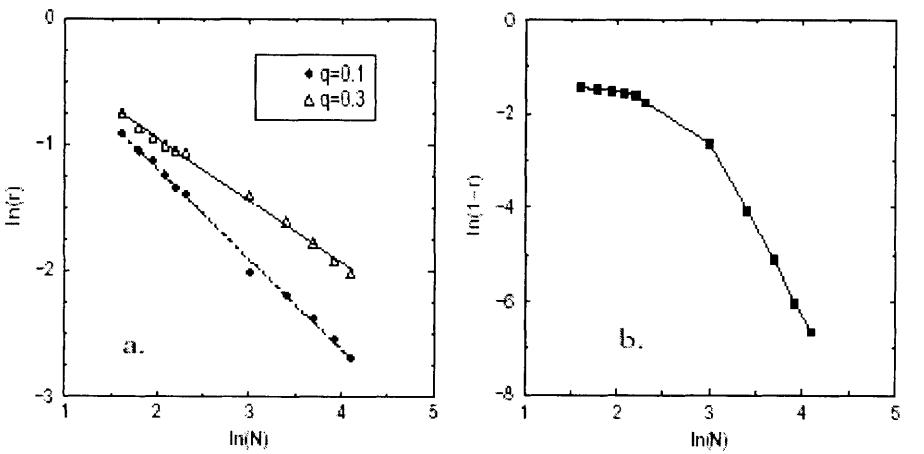
Mindkét optimizációs módszer rengeteg futtatási időt követel, és ez az idő nagyon gyorsan nő a rendszer méretével, ezért a legnagyobb rendszer, amelyre még el tudtuk végezni az optimizálást, az $N = 60$ méretű. (Feladatunk ugyanis egy úgynevezett NP nehézségű optimizációs feladat, ahol azt sejtjük, hogy azon lépések száma, amellyel igazolható, hogy egy állapot globális minimum-e vagy sem, a rendszer méretével bármely hatványfüggvénynél gyorsabban nő.) Mindkét módszer szinte megkülönböztethetetlenül ugyanazt az eredményt adta. A 7. ábrán a szimulációs hűtéssel nyert eredmények láthatók. Mivel mindkét módszer csak közelítő módszer, és mint már említettem, nagyon érzékenyek a szimulációs paraméterek megválasztására, szükségünk volt az előbbi fejezetekben tárgyalt módszerekre, hogy eredményeinknek bizalmat adjunk. A 7a. ábrán látható, hogy $N = 10$ esetén az egzakt eredmények tökéletesen találnak a Monte Carlo-féle optimizációs módszerekkel nyert eredményekkel.

A 7b. ábrán azt is láthatjuk, hogy a rendparaméter standard deviációja a fázisátalakulási pont körül a legnagyobb. Az ábrák ismét a fázisátalakulás létére utalnak, és ábrázolva a rendparaméter értékét N függvényében q=0,1; 0,3; 0,7 esetén azt észleljük, hogy az első két esetben az $r \to 0$ (8a.ábra), míg a harmadik esetben $r \to 1$ (8b.ábra). Ez igazolja a két különböző fázis és ezáltal a fázisátalakulás létét.

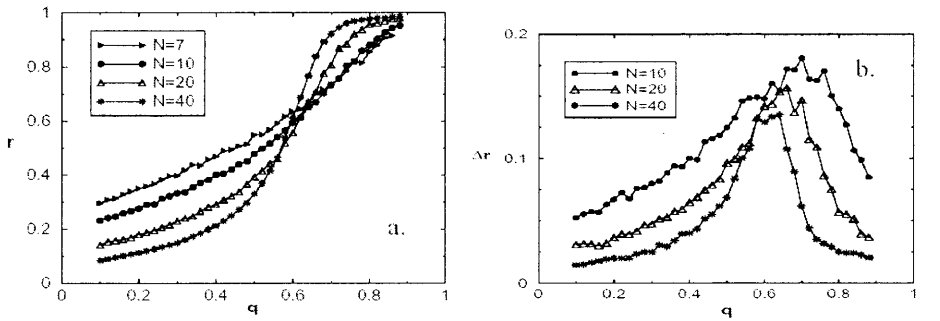
Az egyszerűsített koalíciós modell után megvizsgáltuk, mi történik,



7. ábra. *A szimulációs hűtési módszer eredményei: a. a rendparaméter (a legnagyobb klaszter) és b. a rendparaméter standard deviációja a q pozitív kötések koncentrációjának függvényében.*



8. ábra. *A rendparaméter a rendszer méretének függvényében különböző> a. q=0,1; 0,3 és b. q=0,7 érték esetén.*



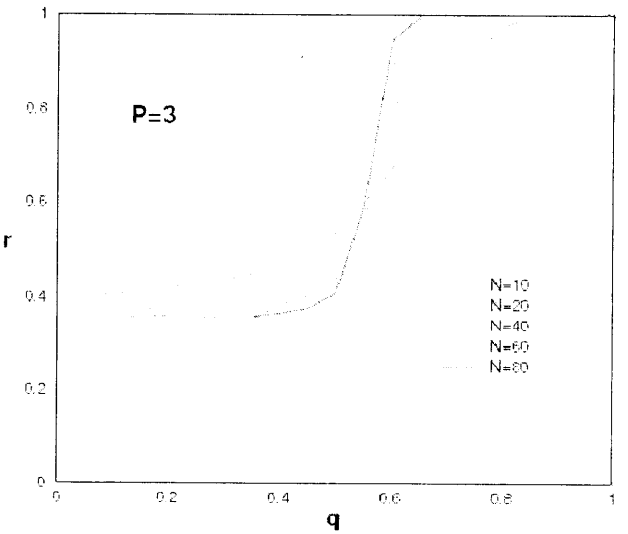
9. ábra. *Az általános esetben nyert eredmények: a. a rendparaméter, b. a rendparaméter standard deviációja, mindkettő a + kötések q valószínűségének a függvényében.*

ha a kapcsolatok nem szimmetrikusak (a társadalmi szerepek azonban továbbra is egyenlőek), vagyis Z_{ij} nem föltétlen egyenlő Z_{ji}-vel. Ennek a feltételnek a bevezetése egy plusz frusztrációt jelent a rendszerben, mégis érdekes módon azt tapasztaltuk, hogy az általunk megválasztott rendparaméter szempontjából ez semmi lényeges változást nem jelent. A szimulált hűtési módszert alkalmaztuk, és a kapott eredmények ismét az észlelt fázisátalakulást mutatták.

Végül az első fejezetben bemutatott általános esetet is vizsgáltuk, amikor az S_i faktorok értékeit véletlenszerűen szétosztjuk a $[0, 1]$ intervallumon, a kötések pedig most is q valószínűséggel pozitívak, $(1 - q)$ valószínűséggel negatívak. A szimulált hűtéssel kapott eredmények a 9. ábrán láthatók. Az ábra ismét a várt fázisátalakulást mutatja, szinte jelentéktelen eltéréssel az egyszerűsített és az általános eset között.

9. A modell rögzített, véges számú állapot esetén

A koalíciók kialakulásának modellálásakor természetesen akárhány koalíció kialakulását meg kell engednünk (akárhány klikkbe rendeződhetnek az egyének), hiszen ez felel meg a valóságnak. Mint már említettük, ebben az esetben ($p = N$) a modellünk a Potts-üvegtől erősen eltérő viselkedést mutat. Ezt a koalíciós modell, illetve a Potts-féle spinüveg közti különbségekkel magyaráztuk. Érdekes most megvizsgálni, hogy mi történik, ha a koalíciók száma egy véges, rögzített érték, megmarad-e



10. ábra. *A szimulációs hűtési módszer eredményei a $p = 3$ esetben.*

ezen esetben az észlelt geometriai fázisátalakulás. A $p = 3$ esetet vizsgáltuk, a szimulációs hűtési módszert alkalmazva. Az eredmények a 10. ábrán láthatóak.

Amint az ábrából látható a fázisátalakulás megmarad rögzített p értékekre is. A rögzített p esetben a modellünk extenzív lesz, így tehát ezen geometriai fázisátalakulás nem a modellünk szuperextenzivitásának a következménye, hanem annak a következménye, hogy a kötések varianciája különböző módon skálázodik.

10. A kapott fázisátalakulásnak egy egyszerű elmélete

Látható, hogy a koalícióformálási modellünkben a kötések más statisztikai tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a spinüveg típusú modellekben. A kötések átlagos értékének és a kötések varianciájának más skálázási tulajdonságuk van a rendszer méretének a függvényében. Amíg a spinüveg típusú modellek esetén a kötések átlagos értéke és varianciája ugyanúgy skálázódik N függvényében (N^{-1}), az általunk vizsgált modell esetén a varianciának N^{-2} alakú skálázása van. Ez arra utal, hogy a

termodinamikai határesetben ($N \to \infty$) a kötések rendezetlensége (amelyekre a variancia jellemez) gyorsabban tart a nullához, mint a kötések átlagértéke, vagyis a „rendezetlenség" és ezáltal a frusztráció is kiskálázódik! Az várható tehát, hogy a termodinamikai határesetben a rendszer egy egyszerű globálisan kölcsönható Potts-modellként (és nem Potts-üvegként) viselkedik, amelyben a kötések egyszerűen helyettesíthetők egy effektív kötéssel, amely egyenlő a kötések átlagértékével. A kötések átlagértéke azonban $(2q - 1)/N$. Látható, hogy $q > 1/2$ esetén ez az átlagérték pozitív, és $q < 1/2$ esetén az átlagérték negatív. Ennek értelmében tehát az általunk vizsgált modell a termodinamikai határesetben egy ferromágneses Potts-modellel ekvivalens, ha $q > 1/2$, és egy antiferromágneses Potts-modellel ekivalens, ha $q < 1/2$. A minimális energiaállapot azonban egy globálisan kapcsolt ferromágneses Potts-modellre az, amikor minden elem ugyanazon állapotban van, az antiferromágneses Potts-modellre meg az, amikor minden elem más Potts-állapotban van. A rendszerünkben tehát egy fázisátalakulás-szerű jelenség kell legyen a $q = 1/2$ környezetében. Véleményünk szerint mi ezen fázisátalakulást észleljük véges rendszerméretekre. A renormalizációs módszerünk a $q_0 = 1/2$ fázisátalakulási pontot sejteti a fenti érvekkel összhangban. Szimulációs eredményeink azonban még nem konkludensek a fázisátalakulási pontot illetően!

11. Érdekes megjegyzések és a modell szociológiai következményei

Az általunk észlelt, perkolációra (Grimmett 1999) emlékeztető fázisátalakulás a statisztikusfizikai vonatkozások mellett érdekes lehet bizonyos szociológiai jelenségek szempontjából is. Gyakran észlelhető a társadalomban, hogy bizonyos kérdések kapcsán egy óriási, az egész rendszert átfogó koalíció alakul ki, ezt a jelenséget szociális perkolációnak (Solomon et alii 2000) nevezik. Gondolhatunk itt bizonyos politikai kérdésekkel kapcsolatos véleményekre, különböző divatokra (pl. egy új zenei stílus). Természetesen vannak kivételek, egyének, akik nem osztoznak a többség véleményével, vagy nem azt a stílust kedvelik, mint a többség, de mégis az egész társadalomban egy nagy koalíció dominál. A mi egyszerű modellünk azt sugallja, lehet hogy a szociális perkoláció a koalíció formálódási mechanizmusok egyszerű következménye. Mikor

a társadalomban nagy a kolaborálási hajlam, akkor egy óriási klaszter fog kialakulni, így elégülnek ki optimálisan az egyének közti bonyolult kapcsolatok. Ellenkező esetben, ha sok a negatív kapcsolat – ennek az oka lehet konfliktus vagy egyszerűen az egyének közti különbségek –, akkor sok kicsi koalíció alakul ki. A modellünk természetesen inkább kis rendszerekre érvényes, ahol mindenki mindenkivel kapcsolatban van (globálisan csatolt rendszer). Erre a legjobb példa talán egy osztályközösség. Az osztályokban is észlelhető a kis csapatok kialakulása, ugyanakkor vannak osztályok, ahol a gyerekek nagyon jól egyeznek, az egész osztály egyetlen társaságot alkot, és vannak esetek, amikor szinte egyáltalán nem alakulnak ki csoportok, maximum két-három főből álló kis baráti körök. Kis rendszerek esetén (amint a szimulációs eredmények is mutatják) az észlelt fázisátalakulás nem „éles", és inkább egy folytonos átmenet tapasztalható, mint egy ugrás.

Fontos megjegyeznünk, hogy a legkiszámíthatatlanabb szociológiai rendszerek azok, amelyekben a pozitív és negatív kötések megközelítőleg egyenlő számban vannak, vagyis a $q = 0,5$ körül. Ilyenkor a pozitív kapcsolatok számának legkisebb változása is nagy ugrást okozhat a rendparaméter (a legnagyobb klaszter mérete) értékében. Ilyenkor a rendparaméter nagyon függ a kötések konfigurációjától, ugyanakkor ebben a tartományban az energiaszintek elfajulása miatt elég sok különböző rendparaméterrel rendelkező alapállapot létezhet, és a rendparaméter deviációja ebben a tartományban maximális. Ugyancsak az elfajulás miatt kis q értékeknél is nehéz az alapállapot konfigurációjának megállapítása, mivel, ahogy a 6a. ábrán látható, az elfajulás csúcsértéke a rendszer növelésével egyre kisebb q értékeknél jelentkezik.

Az elfajulási jelenség (az a tény, hogy a koalícióknak több különböző konfigurációja rendelkezhet ugyanazzal az optimális „energiával") érdekes következményekkel járhat. Lehetséges, hogy egy rendszer állapotát nem lehet egy tiszta állapotként leírni, vagyis a koalícióknak nem egyetlen konkrét konfigurációja létezik, hanem inkább azt mondhatnánk, hogy a kvantummechanikához hasonlóan a rendszer „kevert állapotban" van, és a rendszer viselkedése több állapot szuperpozíciójaként fogható fel. Vegyük erre példaként ismét az osztályközösséget, hiszen erre a rendszerre alkalmazható leginkább a modellünk. Tegyük fel, létezik az osztályban egy olyan kisfiú, aki két különálló társasághoz is vonzódik, mindkét csapattal ugyanolyan jól megvan, hol az egyik társasággal (A) van együtt, hol pedig a másikkal (B), és ha felírnánk a rendszer „ener-

giáját", mindkét esetben ugyanazt kapnánk. Ha sorra mindennap elvégzünk egy megfigyelést, hogy éppen melyik csapattal tartózkodik a kisfiú, folyton váltakozni fognak a mérések eredményei, pedig a fiú kapcsolatai nem változnak, tehát nem mondhatjuk, hogy szimplán az idő múlásával változik a rendszer, és azért vannak különböző eredményeink. Annak a valószínűsége, hogy mikor melyik csapathoz tartozik (A vagy B állapotban van), nem változik, az állapotát az A és B állapot szuperpozíciójaként foghatjuk fel. Ezzel egy nagyon érdekes elvi analógiát észlelünk a szociológiai és kvantummechanikai jelenségek között.

12. A modell hiányosságai

Az általunk felállított modell egy első közelítés, és csak a szociológiai rendszerek vizsgálatához szükséges legalapvetőbb paramétereket veszi figyelembe. A valós szociológiai rendszerek nagyon komplex rendszerek, a társadalmi kapcsolatok nagyon bonyolult topológiával rendelkező hálózatot alkotnak.

A modellünk legfőbb hiányosságai a következők:

- globálisan csatolt rendszert vizsgálunk (minden két elem között létezik kapcsolat), és a valóságban ez csak kis rendszerek esetén helyes. A társadalom, gazdaság és más nagy szociológiai rendszerek esetén figyelembe kellene vennünk, hogy minden elem (egyén, cég stb.) csak véges számú kötéssel rendelkezik, és vannak egyének, akiknek nagyon sok kapcsolatuk van, illetve vannak, akiknek aránylag szűk az ismeretségi körük (Bollobás 2001);
- a kötéseket és a társadalami szerepeket időben állandónak tekintjük, és egy adott konfiguráció esetén keressük az optimális állapotot. Tudjuk jól, hogy a valóságban viszont a kapcsolatok és a szerepek folyton változnak, az optimális állapot kialakulása közben is, bár ezek a változások valószínűleg nem olyan nagy mértékűek;
- elhanyagoljuk a rendszer dinamikáját, feltételezve, hogy mindig az optimális állapot felé tart. Valós rendszerek esetén nem lehetünk biztosak abban, hogy a rendszer eljut az optimális állapotba. Mivel ezek mind frusztrált rendszerek, az energiának sok lokális minimuma van, és könnyen megtörténhet, hogy a rendszer bekerül egy ilyen állapotba, és nem éri el az optimális állapotot (nem a globális minimumba kerül). Ennek egyik oka az lehet, hogy ál-

talában az egyének a saját érdekeiket nézik, a saját energiájukat próbálják csökkenteni, és nem a „globális" optimalizációra törekszenek. Vannak esetek, amikor az egész rendszer energiáját nem lehet csökkenteni egy-egy egyén korrelálatlan koalícióváltásával, hanem csak úgy, hogy egy lépésen belül több egyént helyezünk át más klikkekbe.

Ennek az egyszerű modellnek a vizsgálatakor a célunk az volt, hogy a szociológiai rendszerekben vizsgáljuk a koalíciók optimális konfigurációját. Modellünk nem alkalmas tehát valós koalíciók kialakulásának magyarázatára, viszont hasznos lehet majd hasonló komplexebb, a valós rendszereket jobban megközelítő optimalizációs modellek tanulmányozásánál. Az észlelt fázisátalakulás meg elvi jelentőségű lehet a frusztrált véletlenszerű rácsok szemszögéből.

13. Következtetések

A dolgozatban egy Potts-féle spinüveghez hasonló modellt tárgyaltunk, amellyel a koalíciók optimális konfigurációját modelleztük szociális rendszerekben. Több módszerrel igazoltuk egy új és eddig nem ismert perkolációra emlékeztető fázisátalakulás létét. Ezen fázisátalakulás az optimális állapotban a legnagyobb klaszter méretében jelentkezik a pozitív kötések valószínűségének függvényében. A észlelt fázisátalakulás stabilnak mutatkozott a modell paramétereinek változtatására. Reális szociológiai rendszerekre való alkalmazások esetén a modellünknek számos hiányossága van, de egyszerűsége ellenére hasznos lehet bizonyos szociológiai jelenségek magyarázatánál, illetve más komplex frusztrált modellek tanulmányozásánál.

SZAKIRODALOM

AXELROD, R.–BENNETT, S.
1993 *British J. Political Sci.* 23, 211

BINDER, K.–REGER, J. D.
1992 *Adv. Phys.* 41, 547

BOETTCHER, S.–PERCUS, A. G.
2001 *Phys. Rev. Lett.* 86, 5211
2000 *Artificial Intelligence* 119, 275

BOLLOBÁS B.
2001 *Random Graphs.* Second edition, Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge Univ. Press, Cambridge

CWILICH, G.–KIRKPATRICK, T. R.
1989 *J. Phys. A* 22, 4971

DILLMAN, O.–JANKE, W.–BINDER, K.
1998 *J. Stat. Phys.* 92, 57

ELDERFIELD, D.–SHERRINGTON, D.
1983 *J. Phys. C* 16, L 497

ERZAN, A.–LAGE, E. J. S.
1983 *J. Phys. C* 16, L 555

FLORIAN, R.–GALAM, S.
2000 *Eur. Phys. J. B* 16, 189

GALAM, S.
1996 *Physica A* 230, 174
1997 *Physica A* 238, 66

GRIMMETT, G.
1999 *Percolation.* Second edition, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. vol. 321. Berlin, Springer-Verlag

GROSS, D. J.–KANTER, I.–SOMPOLINSKY, H.
1985 *Phys. Rev. Lett.* 55, 304

KIRCKPATRICK, S.–GELATT, C. D.–VECCHI, M. P.
1983 *Science* 220, 671

KIRKPATRICK, T. R.–THIRUMALAI, D.
1988 *Phys. Rev. B* 37, 5342
1988 *Phys. Rev. B* 38, 4881

KIRKPATRICK, T. R.–WOLYNES, P. G.
1987 *Phys. Rev. B* 36, 8552

PETERS, B. O.–DUNRVEG, B.–BINDER, K.–DE MEO, M. D.–WOLLMAYR, K.
1996 *J. Phys. A* 29, 3503

SANTES, E. DE–PARISI, G.–RITORT, F.
1995 *J. Phys. A* 28, 3025

SOLOMON, S.–WEISBUCH, G.–ARCANGELLIS, L. DE–JAN, N.–STAUFFER, D.
2000 *Physica A* 277, 239

YOKOTA, T.
1995 *Phys. Rev. B* 51, 962